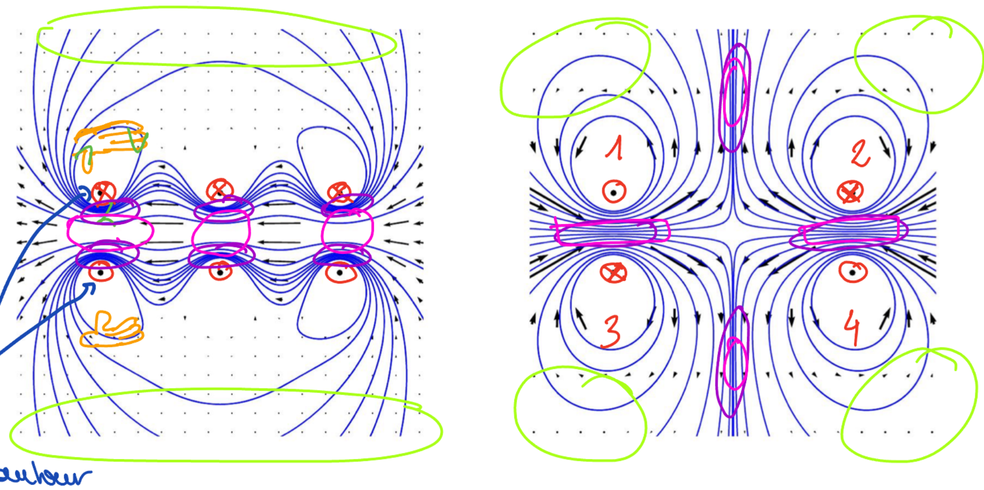
TD EM2

SF2

lignes serrées → ⬭ = champ fort

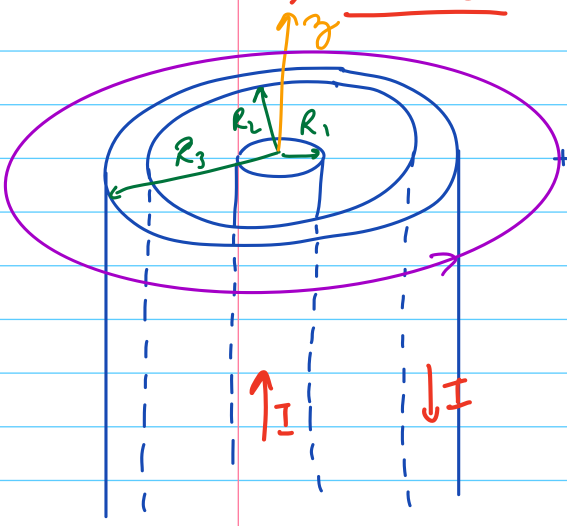
⬭ champ faible
↳ lignes éloignées.

lignes // → ⬭ = champ uniforme



fils
(les l.d.c. tournent autour des fils)

Exercice 2



On se place en coordonnées cylindriques

Le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est plan de symétrie pour la distribution de courant. C'est donc un plan d'antisymétrie pour $\vec{B}$.

Donc
$$\vec{B}(M) = B(M)\,\vec{u_\theta}$$

Par ailleurs, la distribution est invariante par translation le long de $\vec{u_z}$ et par rotation autour de (Oz), donc $B(M) = B(r)$

Au final $\underline{\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u_\theta}}$

On choisit comme contour d'Ampère le cercle orienté par $\vec{u_z}$, autour de (Oz) et de rayon r.

On a $\mathcal{C}_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint_\Gamma B(r)\,.\,r\,d\theta = 2\pi r\, B(r)$.

et
$$I_{\text{enlacé}} = \begin{cases} I\,\dfrac{r^2}{R_1^2} & \text{si } r < R_1 \quad (*) \\ I & \text{si } r \in [R_1\,;R_2] \\ I\left(1 - \dfrac{(r^2-R_2^2)}{(R_3^2-R_2^2)}\right) & \text{si } r \in [R_2\,;R_3] \quad (**) \\ 0 & \text{si } r > R_3 \end{cases}$$

(*) en effet, si $r < R_1$, $I_{\text{enlacé}} = \iint_{\text{disque }(r)} \vec{j_1}\cdot d\vec{S}$

avec $\vec{j_1}$ tq $I = \iint_{\text{disque }(R_1)} \vec{j_1}\cdot d\vec{S}$ et $\vec{j_1} = j_1\vec{u_z}$

ie $I = \pi R_1^2\, j_1$ et $\vec{j_1} = \dfrac{I}{\pi R_1^2}\,\vec{u_z}$

ainsi $I_{\text{enlacé}} = \pi r^2 \times \dfrac{I}{\pi R_1^2} = I\,\dfrac{r^2}{R_1^2}$

(3)(c) De même, pour $r \in [R_2 ; R_3]$, on a $I_{enlacé} = I + \iint_{anneau\,(r)} \vec{j_2} \cdot d\vec{S}$

avec $\vec{j_2}$ tel que $-I = \iint_{anneau\,(R_3)} \vec{j_2} \cdot dS\,\vec{u_z}$ et $\vec{j_2} = j_2\,\vec{u_z}$

ie $-I = j_2 \times \pi(R_3^2 - R_2^2)$ et $\vec{j_2} = -\dfrac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}\vec{u_z}$

donc
$$I_{enlacé} = I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}\pi(r^2 - R_2^2)$$
$$= I\left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

Au final :
$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 I \dfrac{r}{2\pi R_1^2}\vec{u_\theta} & \text{si } r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta} & \text{si } r \in [R_1 ; R_2] \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \dfrac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)\vec{u_\theta} & \text{si } r \in [R_2 ; R_3] \\ \vec{0} & \text{si } r > R_3 \end{cases}$$

Rq : on a bien continuité de B en R_1, R_2 et R_3 :)

L'intérêt d'un tel câble est qu'il n'y a pas de fuite magnétique vers l'extérieur.

Exercice 3

1) cf cours fil épais

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{R^2}{2r} j \; \vec{u_\theta} & \text{si } r > R \\ \mu_0 \dfrac{r}{2} j \; \vec{u_\theta} & \text{si } r < R \end{cases}$$

2) D'après le théorème de superposition :

$$\vec{B}_{\text{sans cavité}} = \vec{B} + \vec{B}_{\text{cavité seule pleine}}$$

Donc $\vec{B} = \vec{B}_{sc} - \vec{B}_{csp}$

Dans la cavité, on a $O_1M < R_1$ et $O_2M < R_2$

en notant R_1 le rayon du fil plein et R_2 celui de la cavité.

Par ailleurs, dans le repère $(O_1, \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$,

on peut écrire $\vec{u_\theta} = \vec{u_z} \wedge \vec{u_r} = \vec{u_z} \wedge \dfrac{\overrightarrow{O_1M}}{O_1M}$

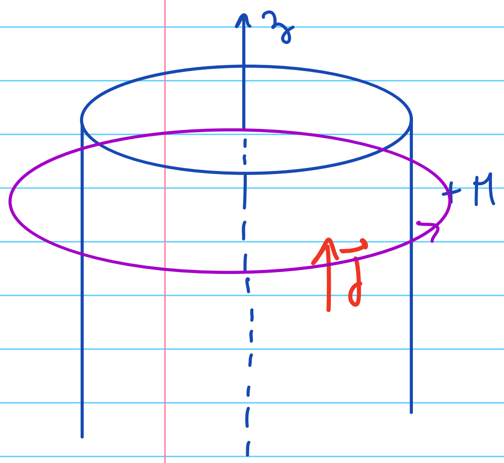
De même, dans $(O_2, \vec{u_r}', \vec{u_\theta}', \vec{u_z})$: $\vec{u_\theta}' = \vec{u_z} \wedge \dfrac{\overrightarrow{O_2M}}{O_2M}$

donc $$\vec{B} = \mu_0 \frac{O_1M}{2} j \left(\vec{u_z} \wedge \frac{\overrightarrow{O_1M}}{O_1M}\right) - \mu_0 \frac{O_2M}{2} j \left(\vec{u_z} \wedge \frac{\overrightarrow{O_2M}}{O_2M}\right)$$

$$= \mu_0 \frac{j}{2} \vec{u_z} \wedge \left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}\right)$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \frac{j}{2} \vec{u_z} \wedge \overrightarrow{O_1O_2}}$$

Exercice 4



1) On a $I = \iint_{disque} \vec{j} \cdot d\vec{S}$

$$= \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e_z} \cdot r dr d\theta \vec{e_z}$$

$$= 2\pi \int_0^R J_0 \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr$$

$$= 2\pi J_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R$$

$$= 2\pi J_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right)$$

$$\boxed{I = \pi J_0 \frac{R^2}{2}} \quad \text{ie} \quad \boxed{J_0 = \frac{2I}{\pi R^2}}$$

2) Le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est plan de symétrie pour la distribution de charge, il est donc plan d'antisymétrie pour $\vec{B}$ et
$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{u_\theta}.$$
Par ailleurs, la distribution est invariante par translation le long de (Oz) et par rotation autour de (Oz). Donc
$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u_\theta}$$

On choisit comme contour d'Ampère Γ le cercle d'axe (Oz) et de rayon r :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r)$$

et si $r > R$ $I_{enlacé} = I$

si $r < R$ $I_n = \iint_\Gamma \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{r=0}^{r_M} J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr d\theta$ en notant r_n la coordonnée radiale du M.

$$I_\Gamma = J_0 2\pi \left(\frac{r_n^2}{2} - \frac{r_n^4}{4R^2}\right) = J_0 \pi r_n^2 \left(1 - \frac{r_n^2}{2R^2}\right)$$

$$= 2I \frac{r_n^2}{R^2} \left(1 - \frac{r_n^2}{2R^2}\right)$$

On a donc $$\boxed{\vec{B}(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u_\theta} & \text{si } r > R \\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{\pi} \dfrac{r}{R^2} \left(1 - \dfrac{r^2}{2R^2}\right) \vec{u_\theta} & \text{si } r < R . \end{cases}}$$

Rq : On a bien continuité de B en $r = R$:)

Exercice 5

1) a) Le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ est plan de symétrie de la distribution de courant, donc plan d'antisymétrie pour $\vec{B}$.

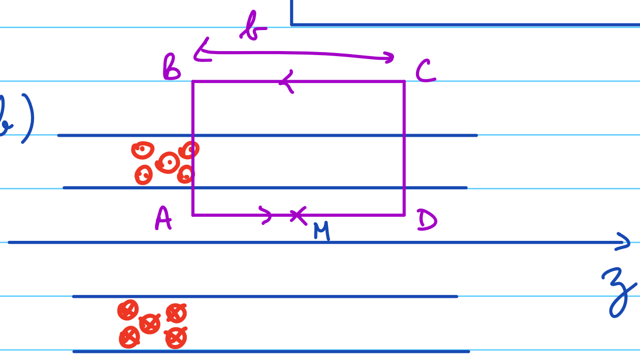
Donc $\vec{B}(M) = B(M)\,\vec{u_z}$

Par ailleurs, la distribution est invariante par rotation autour de (Oz) et par translation le long de (Oz)

Donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

Au final $\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u_z}}$

b)



On considère le contour d'Ampère ci-contre : un rectangle dont un côté est à l'extérieur et le côté opposé passe par M.

On a
$$\mathcal{C}_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_A^B \underbrace{\vec{B}\cdot dl(-\vec{u_r})}_{=0} + \int_B^C \underbrace{\vec{B}\cdot dl(-\vec{u_z})}_{=\vec{0}} + \int_C^D \underbrace{\vec{B}\cdot dl\,\vec{u_r}}_{=0} + \int_D^A \vec{B}\cdot dl\,\vec{u_z}$$
$$= B(r)\,b$$

et
$$I_{\text{enlacé}} = \begin{cases} (nb)(m(R_2-R_1))\,I & \text{si } r < R_1 \\ (nb)(m(R_2-r))\,I & \text{si } r \in [R_1 ; R_2] \end{cases}$$

En appliquant le théorème d'Ampère, on a donc
$$\boxed{B(r) = \begin{cases} \mu_0 n m (R_2-R_1)\,I & r < R_1 \\ \mu_0 n m (R_2 - r)\,I. & r \in [R_1 ; R_2] \end{cases}}$$

2) a) $\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho r \omega \vec{u_\theta}$ par définition

b) idem 1a) $\vec{B}(r) = B(r)\, \vec{u_z}$

c) premières étapes idem 1b).

Calcul de $I_{enlacé}$:

si $r < R_1$

$$I_{enlacé} = \iint_\Gamma \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{z=z_0}^{z_0+b} \int_{r=R_1}^{R_2} \rho r \omega \, dr dz$$

$$= \rho \omega b \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\rho \omega b}{2} (R_2^2 - R_1^2)$$

et pour $r \in [R_1 ; R_2]$

$$I_{enlacé} = \int_{z_0}^{z_0+b} \int_{r_M}^{R_2} \rho r \omega \, dr dz = \frac{\rho \omega b}{2} (R_2^2 - r^2)$$

On a donc

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{\rho \omega}{2} (R_2^2 - R_1^2) & \text{si } r < R_1 \\ \mu_0 \dfrac{\rho \omega}{2} (R_2^2 - r^2) & \text{si } r \in [R_1 ; R_2] \end{cases}$$

d) Pour que les distributions soient équivalentes, il faut que $\vec{j}$ ne dépende pas de r.

Il suffit que $\rho = \dfrac{\rho_0}{r}$, car alors $\vec{j} = \dfrac{\rho_0}{r} r \omega \vec{u_\theta} = \rho_0 \omega \vec{u_\theta}$.

Une distribution uniforme de charge ne peut fonctionner.